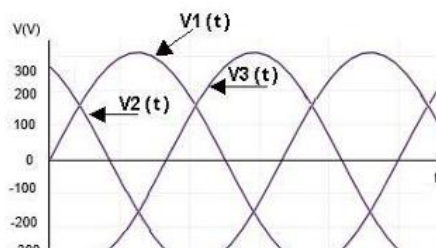
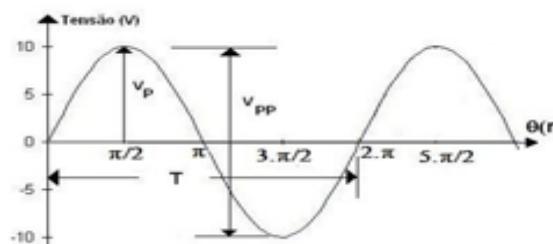
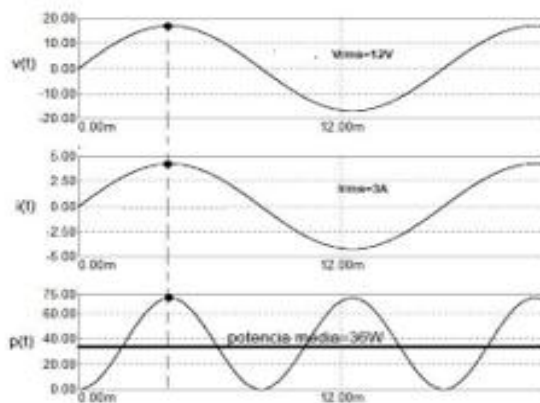
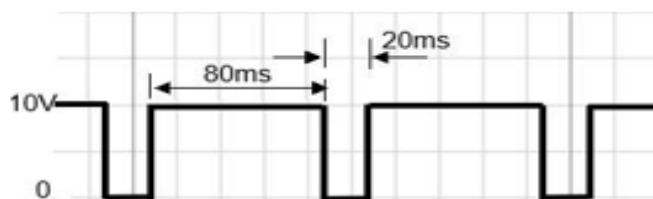


Prof. Romulo Oliveira Albuquerque



Análise de Circuitos em Corrente Alternada com Simulação



Dedicatória

Para Luiz Carlos Altman Neto, neto querido.

Prefácio

O principal objetivo desta obra é o estudo de circuitos em tensão alternada, sendo o capítulo 1 dedicado ao estudo da tensão senoidal. O capítulo 2, analisa os circuitos puramente resistivos em CA. Os dispositivos eletromagnéticos, relé e transformador, são estudados no capítulo 3. O capítulo 4 estuda o indutor onde é introduzido o conceito de reatância indutiva. O capítulo 5 faz a análise do circuito RL serie onde é introduzido o conceito de impedância e fator de potência. O capítulo 6 apresenta o componente capacitor e sua aplicação em tensão contínua, carga e descarga. É estudado o circuito puramente capacitivo em C.A, apresentando o conceito de reatância capacitiva. O capítulo 7 estuda os circuitos RC serie em CA, impedância capacitiva. O capítulo 8 é dedicado para algumas aplicações de circuitos RC, os filtros, o diferenciador e o integrador. O capítulo 9 estuda os circuitos RLC, dentre eles o circuito ressonante e o circuito para a correção do fator de potência.

Com exercícios resolvidos e exercícios propostos, o diferencial do livro é o uso de um software de simulação, o [Falstad](#), de uso livre, que pode ser baixado da Internet. Os links dos arquivos são fornecidos para melhorar a compreensão. Proponho que o leitor resolva os exercícios resolvidos, novamente, e os propostos em seguida faça a simulação para comparar os resultados.

O autor

Sobre o Autor

Formado em Engenharia Elétrica pela EEM ([Escola de Engenharia Mauá](#) - São Caetano do Sul -SP em 1977)

Mestre em Engenharia Elétrica pela [Escola Politécnica da USP](#) - 2002 - Orientador Dr. Antônio Carlos Seabra

Foi professor no Centro Universitário Anhanguera d Santo André - Estado de São Paulo.

Foi professor na ETI Lauro Gomes (Hoje [ETEC Lauro Gomes](#)) - 1976 a 2005 - São Bernardo do Campo - Estado de São Paulo.

Foi diretor (2005 a 2009) da FATEC-SB ([Faculdade de Tecnologia de São Bernardo do Campo](#)) onde implantou o curso de Automação Industrial

Foi membro do CDE (Conselho de Desenvolvimento Econômico) da Cidade de São Bernardo do Campo

Livros de Autoria - **Editora Erica/Saraiva**

- Análise de Circuitos em Corrente Contínua
- Análise de Circuitos em Corrente Alternada
- Circuitos em Corrente Alternada (fora do catálogo)
- Análise e Simulação de Circuitos no Computador - EWB5 (fora do catálogo)
- Análise e Simulação de Circuitos no Computador - MultiSIM2001 (fora do catálogo)
- Utilizando Eletrônica com AO, SCR, TRIAC, UJT, PUT, CI 555, LDR, LED, FET e IGBT em coautoria com Seabra, A.C.

Atualmente é professor na FATEC-SB (Faculdade de Tecnologia de São Bernardo do Campo) nas disciplinas Eletricidade básica, eletrônica básica

Índice

Capítulo 01 – Tensão senoidal	05
1.1 O que é uma tensão alternada	05
1.2 Tensão senoidal	08
1.2.1 Forma gráfica	08
1.2.2 Expressão Matemática	14
1.2.3 Diagrama Fasorial	16
1.2.4 Número Complexo	20
1.3 Defasagem	23
 Capítulo 2 – Circuito Puramente Resistivo	 30
2.1 Lei de Ohm em CA	30
2.2 Valor Eficaz	32
2.3 Valor Medio	37
 Capítulo 3 – Dispositivos Eletromagnéticos	 41
3.1 A Bobina	41
3.2 O Relé	42
3.3 O Transformador	44
 Capítulo 4 – Circuito Puramente Indutivo	 49
4.1 O Indutor	49
4.2 O Indutor em CC	50
4.3 O indutor em CA	53
4.3.1 Primeira Lei de OHM para indutor Ideal	55
 Capítulo 5 – Circuito RL série	 58
5.1 Circuito RL série	58
5.1.1 Triângulo das Tensões	59
5.1.2 Triângulo das Impedâncias	60
5.1.3 Triângulo das Potências	60
5.1.4 Medindo defasagem	64
 Capítulo 6 – O Capacitor – Circuitos com Capacitor em CC	 75
6.1 O Capacitor	75
6.2 Tipos de capacitor	77
6.3 Carga do capacitor em C.C.	79
6.4 Descarga do capacitor em C.C.	82

6.5 Associação de capacitores.....	83
6.6 Capacitor em CA.....	84
Capítulo 7 – Circuito RC serie em CA.....	88
7.1 Circuito RC série em C.A.....	88
Capítulo 8 – Aplicações de circuitos RC em C.A.....	97
8.1 O Decibel.....	97
8.2 Filtros Passivos.....	101
8.2.1 Estudo do Filtro Passa Baixas.....	103
8.2.2 Estudo do Filtro Passa Altas.....	109
8.3 Diferenciador e Integrador.....	116
8.3.1 Diferenciador.....	116
8.3.2 Integrador.....	120
Capítulo 9 – Circuito RLC – Correção do F.P.....	123
9.1 Circuito RLC série.....	123
9.1.1 Impedância complexa.....	124
9.1.2 Ressonância.....	124
9.1.3 Fator de Qualidade.....	126
9.2 Correção do Fator de Potência.....	130
9.3 Circuitos mistos em C.A.....	135
Apêndice A – Números Complexos.....	146
Apêndice B – Respostas dos Exercícios Propostos.....	152

Capítulo 1 – Tensão Senoidal

Nesse capítulo é apresentado a tensão senoidal e suas formas de representação, exercícios resolvidos e exercícios propostos

1.1 O que é uma tensão alternada?

Antes de responder essa pergunta, relembremos o que é uma tensão contínua. Tensão contínua ou tensão constante é uma tensão que tem sempre a mesma polaridade e valor para todos os instantes. Exemplos: Pilhas e baterias, Figura 1.1. Observe a simbologia para bateria, são duas células ligadas em série, mas de uma forma geral podemos usar qualquer um dos dois. Por exemplo, o simulador Multisim usa o símbolo com as duas células em série, o Microcap usa o outro.

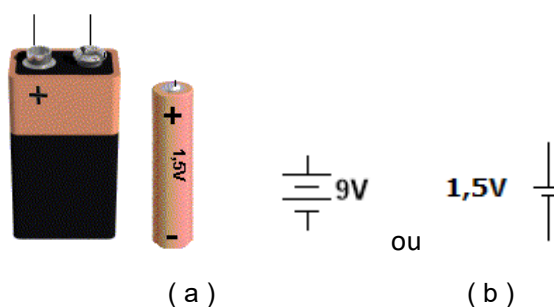


Figura 1.1 – Geradores de tensão contínua (a) Aspecto físico (b) simbologia

Obs: A simbologia a ser usada neste livro para bateria pode ser qualquer uma das duas mostradas na Figura 1.1.

Outra forma de mostrar o que é um gerador de tensão constante ou contínua é desenhar o gráfico da tensão nos terminais em função do tempo. A Figura 1.2 mostra o gráfico da tensão em função do tempo de um gerador de tensão contínua de 9 V.

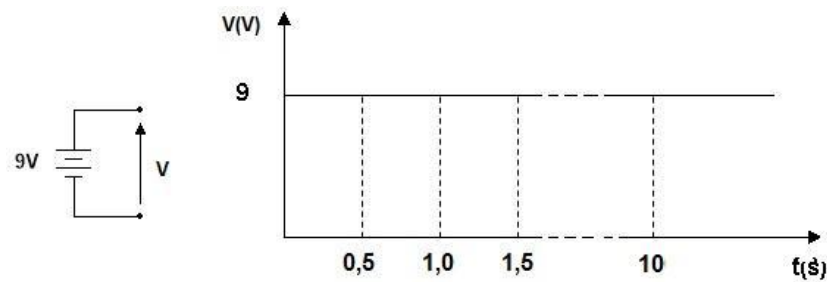


Figura 1.2 – Gráfico da tensão em função do tempo nos terminais de uma bateria de 9 V

O gráfico da Figura 1.2 especifica que a tensão nos terminais da bateria é sempre 9 V em qualquer instante, dizemos que essa é uma tensão contínua.

Uma tensão alternada é uma tensão cujo valor e polaridade se modificam ao longo do tempo.

Conforme o comportamento da tensão então temos os diferentes tipos de tensão alternada: **Senoidal, quadrada, triangular, pulsante** etc .

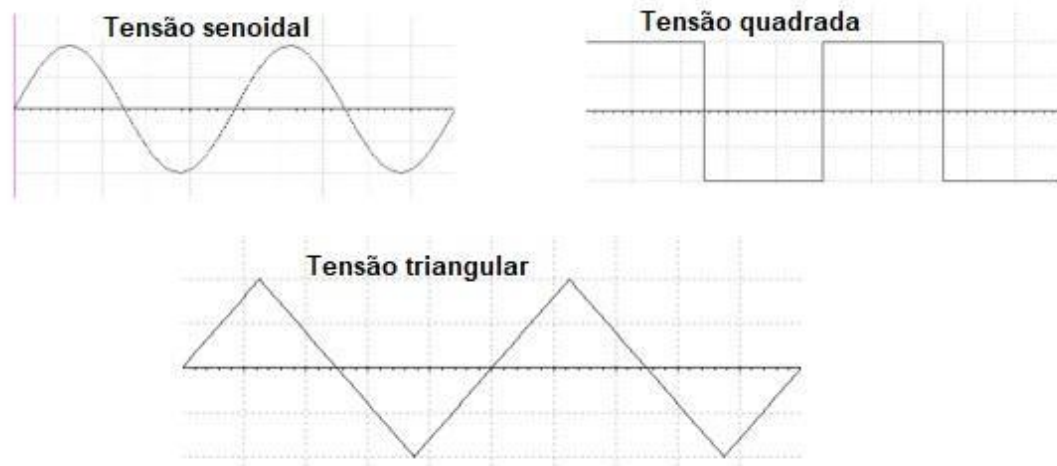
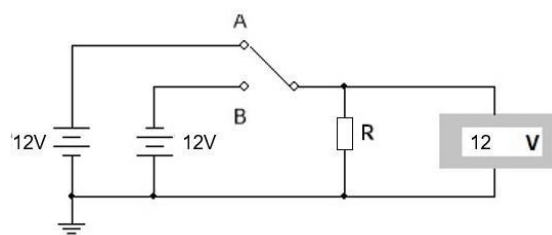


Figura 1.3 – Exemplos de tensão alternada

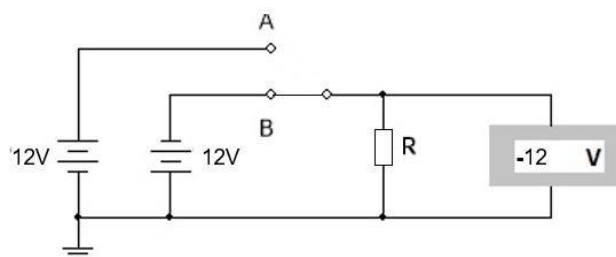
[Link para Simulador vídeo](#)

Observe o circuito da Figura 1.4. A chave fica na posição A durante 0,5s, e na posição B 0,5s e assim por diante.

As duas figuras mostram o circuito em duas condições diferentes. A Figura 1.4a mostra a resistência ligada na bateria de 9 V. A indicação do voltímetro é 9 V. A Figura 1.4b mostra a resistência ligada a outra bateria de 9 V, porém com polaridade contrária portanto da indicação no voltímetro é -9 V.



(a)



(b)

Figura 1.4 – Obtendo uma tensão quadrada (a) Tensão positiva (b) tensão negativa

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

A Figura 1.5 mostra o comportamento gráfico da tensão em R.

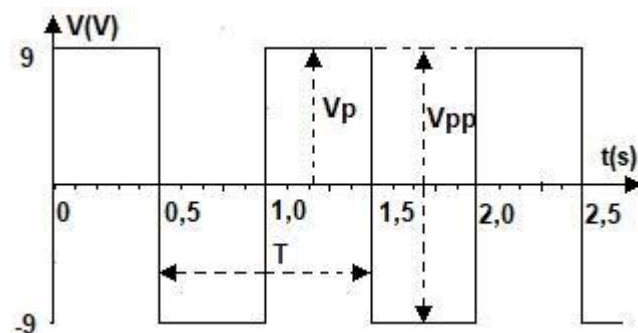


Figura 1.5 – Gráfico da tensão quadrada da Figura 1.4

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

Nesse gráfico são definidas algumas grandezas:

Valor de pico (V_p): maior valor que a tensão pode assumir, no exemplo $V_p = 9$ V.

Valor de pico a pico (V_{pp}): Valor da tensão entre o pico maior (9 V) e o pico menor (-9 V) no exemplo $V_{pp}=18$ V.

Período (T): tempo para uma determinada condição voltar a repetir, no exemplo $T=1$ s.

1.2 Tensão Senoidal

É uma tensão que varia com o tempo de acordo com uma lei senoidal

Existem quatro formas de representar uma tensão senoidal: A Forma Gráfica, Expressão matemática, O Diagrama Fasorial e A Forma Complexa

Obs: Quando a tensão for conectada a uma carga, aparecerá uma corrente que será senoidal. As formas de representar uma tensão senoidal se aplicam para corrente senoidal.

1.2.1 Forma de representar tensão senoidal: Forma Gráfica

É semelhante à representação da tensão quadrada da Figura 1.5. Veja o exemplo da Figura 1.6. No eixo vertical são os valores da tensão e no eixo horizontal os valores de tempo correspondentes. Então quando $t=0$ s a tensão vale 0 V, após 0,5 ms a tensão atinge 10 V e assim por diante.

Obs: Tudo sobre tensão se aplica a corrente, forma de onda, expressão matemática, Diagrama Fasorial e representação usando números complexos.

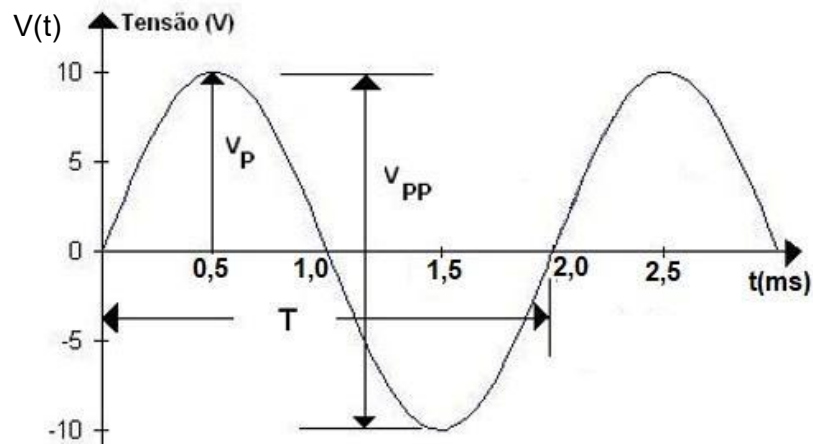


Figura 1.6 – Representação gráfica de uma tensão senoidal em função do tempo

[Link para o Simulador](#) [Vídeo](#)

No gráfico aparecem as seguintes grandezas e valor:

Valor de pico: $V_p = 10 \text{ V}$

Valor de pico a pico: $V_{pp} = 20 \text{ V}$

Período: $T = 2 \text{ ms}$ (2 milissegundos = $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$)

Existe uma relação entre tempo (t) e ângulo (θ)

*Obs: θ teta é uma letra grega. Você pode obter digitando a letra **q** com a fonte Symbol selecionado.*

A função seno é uma função com período igual a $2\pi \text{ rad}$ (dois pi radianos). A Figura 1.7 mostra o mesmo gráfico da Figura 1.6, porém a tensão varia em função do ângulo.

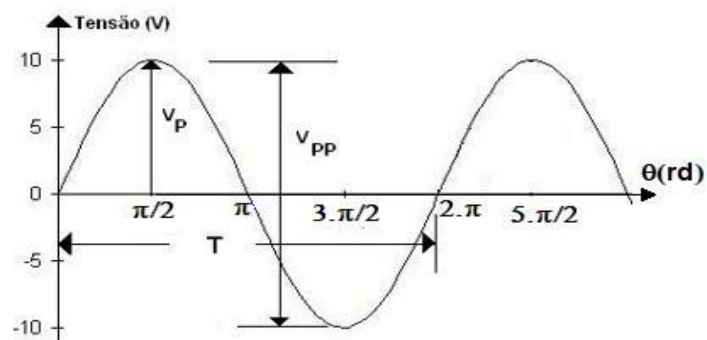


Figura 1.7 – Representação gráfica de uma tensão senoidal em função do ângulo

No gráfico aparecem as seguintes grandezas e valor:

Valor de pico: $V_p=10V$

Valor de pico a pico: $V_{pp}=20V$

Período: $T=2.\pi \text{ rd}$

Então existe uma relação entre ângulo descrito (θ) e tempo (s).

Vamos fazer uma comparação entre espaço percorrido (S), tempo (t) e velocidade (V).

Duas cidades, A e B, estão separadas por uma distância de 100 km. Um carro vai de A até B em 2 h, em velocidade constante, qual a velocidade desenvolvida pelo carro?

Lembrando que $S=V.t$

$$V=\frac{S}{t} \quad \text{ou} \quad V=\frac{100\text{km}}{2\text{h}}=50\text{km/h}$$

Usando o mesmo conceito para ângulo percorrido, θ , com velocidade angular, ω e no tempo t:

$$\theta=\omega.t \quad \text{ou} \quad \omega=\theta/t$$

Olhando para as Figuras 1.6 e 1.7 observamos que para descrever um ângulo de $2.\pi \text{ rd}$ demora 2 ms logo isso é feito com uma velocidade chamada

velocidade angular ω , também chamada frequência angular. Calculando ω :

$$\omega=\frac{\theta}{t}=\frac{2.\pi \text{ rd}}{2\text{ms}}=\frac{2.\pi \text{ rd}}{2.10^{-3}\text{s}}=\pi.10^3\text{rd/s}$$

Ou por extenso $\omega = 3140 \text{ rd/s}$ considerando $\pi = 3,14$

Obs: ω é a letra grega minúscula chamada ômega e Ω é a letra grega maiúscula também chamada ômega.

Genericamente:

$$\theta = \omega \cdot t \quad \text{Eq. 1}$$

onde t é em s (segundos) θ é em rd (radianos) e ω é em rd/s (radianos por segundo).

Caso particular: $t = T$ e $\theta = 2 \cdot \pi \text{ rd}$ $2 \cdot \pi = \omega \cdot T$

ou

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Outra grandeza importante é a frequência (f) especificada e ciclos/s ou Hertz (Hz).

Frequência é igual ao número de ciclos completados por segundo.

1 Ciclo/s = 1 Hz

A relação entre período (T) e frequência (f) é dada por:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Eq. 2} \quad \text{ou}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

Portanto se:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \text{e como } T = \frac{1}{f}$$

Resulta:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad \text{Eq. 3}$$

Por exemplo: a tensão que alimenta a nossa residência tem frequência de 60 Hz ou 60 ciclos/s. Qual o período (T) e qual a frequência angular (ω)?

$$T = \frac{1}{60} = 0,01666\text{s} = 16,66\text{ms}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 377\text{rd/s}$$

Para compreender melhor as três grandezas T(período), f(frequência) e ω (frequência angular) considere os exemplos.

Exercício Resolvido 1: Um ponto descreve uma trajetória circular com velocidade constante. Sabendo-se que o ponto descreve uma volta a cada segundo determinar.

- a) Período T
- b) Frequência (f)
- c) Frequência angular ω

Solução

a) Se o ponto dá uma volta a cada segundo significa que o período (tempo para completar 1 ciclo) é de 1s. $T = 1\text{ s}$

b) O número de ciclos completados por segundo é a frequência. Portanto a frequência é de 1 Ciclo/s = 1 Hz ou usando a expressão que relaciona período com frequência.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1\text{ Hz}$$

c) Como o ponto dá uma volta por segundo e uma volta tem $2 \cdot \pi$ rd, a frequência angular é

$$\omega = 2 \cdot \pi \text{ rd/s}$$

ou usando a expressão que relaciona frequência angular e frequência

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi \text{ rd/s}$$

Exercício Resolvido 2: Um ponto descreve uma trajetória circular com velocidade constante. Sabendo-se que o ponto descreve duas voltas a cada segundo determinar.

- a) Período T
- b) Frequência (f)
- c) Frequência angular ω

Solução

- a) Se o ponto dá duas voltas em 1 segundo, logo uma volta ele dá em 0,5 s, isto é, o período vale $T=0,5$ s.
- b) Como são completados 2 ciclos por segundo a frequência é $f=2$ Hz. Ou usando a expressão que relaciona frequência e período.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ Hz}$$

- c) Duas voltas por segundo significa $4 \cdot \pi$ rd/s ou usando a expressão que relaciona ω com f.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4 \cdot \pi \text{ rd/s}$$

Exercício Resolvido 3: Um ponto descreve uma trajetória circular com velocidade constante. Sabendo-se que o ponto descreve 1 volta em 2 s. Determinar.

- a) Período T
- b) Frequência (f)
- c) Frequência angular ω

Solução

a) Como o ponto precisa de 2 s para completar 1 volta(período), o período vale $T=2$ s.

b) A frequência é 0,5 Hz ou usando a expressão

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ Hz}$$

1.2.2 Forma de representar tensão senoidal: Expressão Matemática

Outra forma de representar uma tensão senoidal é através da expressão matemática que relaciona a tensão em função do tempo, $v(t)$.

Genericamente é:

$$v(t) = V_P \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta_0) \quad \text{Eq. 4}$$

onde

V_P é o valor de pico da tensão senoidal (em Volts)

ω é a frequência angular (em radianos/segundo)

θ_0 é o ângulo de fase inicial (em radianos ou graus)

Exercício Resolvido 4:

Uma tensão senoidal tem a expressão $v(t) = 10 \cdot \text{sen}(1000 \cdot \pi \cdot t)$ (V). Determinar:

- a) Valor de pico e valor de pico a pico
- b) Frequência angular ω (rd/s) e frequência f (Hz)
- c) Ângulo de fase inicial θ_0 (graus ou rd)

Solução

a) Por Inspeção e comparando com a Eq. 4, V_P =valor de pico=10V

ω = frequência angular= $1000 \cdot \pi$ rd/s

θ_0 =ângulo de fase inicial=0 rd ou 0°

Exercício Resolvido 5: Determinar V_p , ω e ângulo de fase inicial da tensão

$$v(t) = 50 \cdot \text{sen}(100 \cdot t + 90^\circ) \text{ (V)}$$

Solução:

Por observação e comparando com a Eq. 4

$$V_p = 50 \text{ V}$$

$$\theta_0 = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad} = \text{ângulo de fase inicial}$$

Exercício Resolvido 6:

Considere o gráfico da Figura 1.8, de uma tensão senoidal. Determinar:

- Valor de pico (V_p) e valor de pico a pico (V_{pp})
- Período (T), Frequência (f) e frequência angular (ω)
- Expressão da tensão em função do tempo

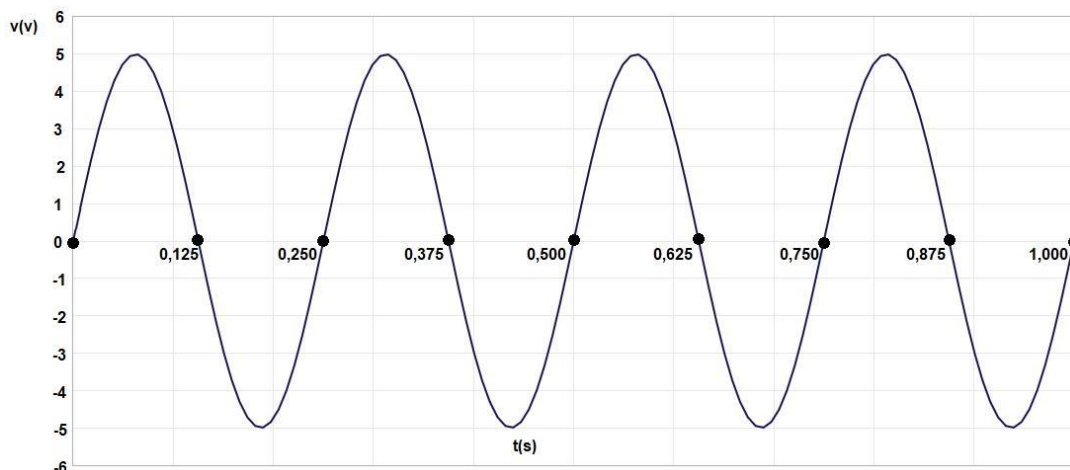


Figura 1.8 – Representação gráfica de uma tensão senoidal em função do tempo

[Link para o Simulador_ Vídeo](#)

Solução:

- a) Valor de pico: $V_p = 5 \text{ V}$ por observação

Valor de pico a pico: $V_{pp} = 10 \text{ V}$ por observação

- b) Período: $T = 0,25 \text{ s}$ por observação

Frequência: $f = 1/0,25 = 4 \text{ Hz}$ ou 4 Ciclos/s

Frequência angular: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8 \cdot \pi \text{ rad/s}$

Ao invés da tensão ser função do tempo, a tensão pode ser escrita em função do ângulo (θ).

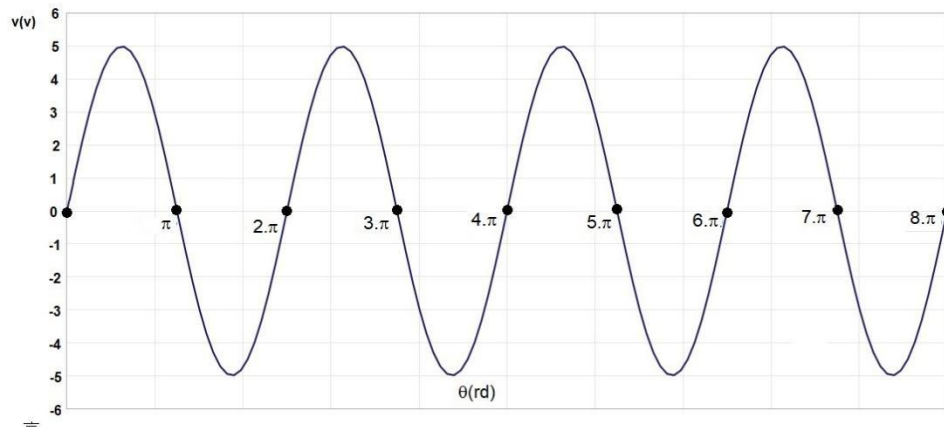


Figura 1.9 – Representação gráfica de uma tensão senoidal em função do ângulo

c) Expressão da tensão em função do tempo: $v(t)=5.\text{sen}(8.\pi.t)$ (V)

1.2.3 Forma de representar tensão senoidal: Diagrama Fasorial

É um gráfico que mostra a tensão como um vetor girante de amplitude igual a V_P e que gira com frequência angular ω no sentido anti-horário. A Figura 1.10 mostra um Diagrama Fasorial (D.F) genérico onde aparecem o valor de pico (V_P), o ângulo de fase inicial (θ_0) e a frequência angular (ω).

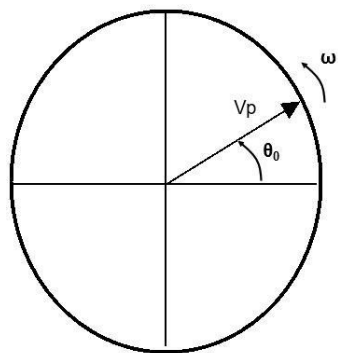


Figura 1.10 – Diagrama Fasorial genérico de uma tensão senoidal

[Link para a animação](#) [Vídeo](#)

A projeção do Fasor V_P no eixo vertical é uma grandeza senoidal, Figura 1.11.

Observe que à medida que o segmento gira com frequência angular ω , a

amplitude da projeção varia de amplitude eventualmente até mudando de polaridade quando o ângulo for maior do que 180° .

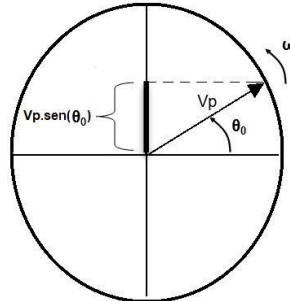


Figura 1.11 – Projetando o segmento V_P no eixo vertical

[Link para ver tensão senoidal variando amplitude](#) [Vídeo](#)

Obs: O Diagrama Fasorial é representado no instante $t=0$.

Exercício Resolvido 7: Dada a expressão em função do tempo de uma tensão. Determinar:

- Frequência angular (ω) e frequência (f)
- Desenhar o D.F
- Desenhar o gráfico de $v(t)$

$$v_1(t) = 30 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t + \pi/2) \text{ (V)}$$

Solução:

- a) Como visto, a expressão genérica de $v(t) = V_P \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta_0)$

Comparando com $v_1(t) = 30 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t + \pi/2)$ (V) concluímos que $V_P = 30$ V
 $\omega = 100 \cdot \pi$ rd/s e $\theta_0 = \pi/2$ rd

Ou $\theta_0 = 90^\circ$

Como $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

$$f = \frac{100 \cdot \pi \text{ rd}}{2 \cdot \pi} = 50 \text{ Hz}$$

Diagrama Fasorial

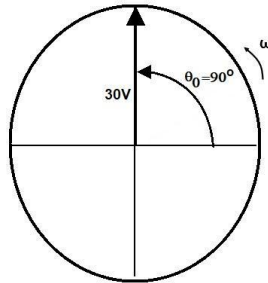
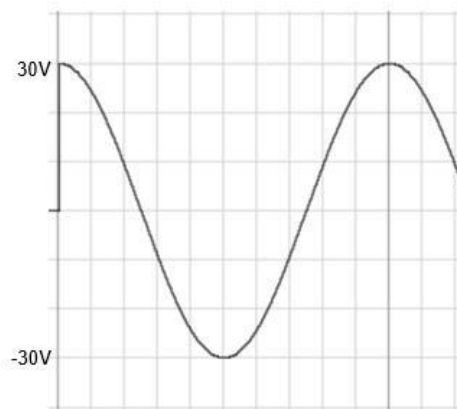


Figura 1.12 – Diagrama Fasorial para exercício resolvido 7

Observe que para $t=0$ na expressão de $v_1(0) = 30 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot 0 + \pi/2) = 30V$

c) Gráfico de $v(t)$



[Link para simulador](#) [Vídeo](#)

Exercício Resolvido 8:

Dada a expressão em função do tempo, Determinar:

- Valor de pico (V_P) Frequência angular (ω) e frequência (f)
- Desenhar o D.F
- Desenhar o gráfico de $v(t)$

$$v_2(t) = 100 \cdot \sin(500 \cdot \pi \cdot t + 45^\circ) (V)$$

Solução:

- Comparando a expressão genérica com $V_2(t)$ obtém-se $V_p = 100 V$, $\omega = 500 \cdot \pi$ rd/s e $\theta_0 = 45^\circ$.

$$f = \frac{500 \cdot \pi \text{ rd}}{2 \cdot \pi} = 250 \text{ Hz}$$

Diagrama Fasorial e Forma de onda da tensão

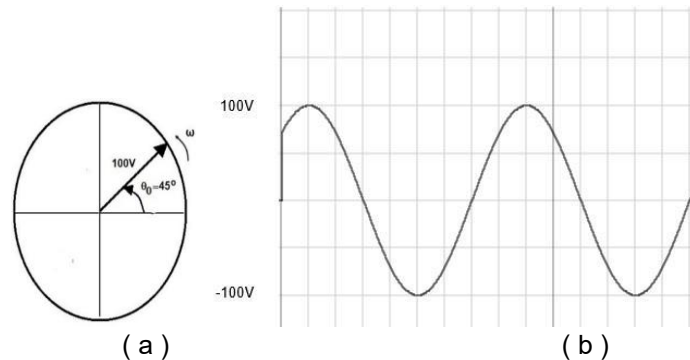


Figura 1.13 – Diagrama Fasorial para exercício resolvido 8 (a) D.F (b) Forma de onda

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

Exercício Resolvido 9:

Dada a expressão em função do tempo

$$v_3(t) = 5 \cdot \sin(200 \cdot \pi \cdot t - 45^\circ) \text{ (V)}$$

Determinar:

- Valor de pico (V_P) Frequência angular (ω) e frequência (f)
- Desenhar o D.F
- Desenhar o gráfico de $v(t)$

Solução:

a) Comparando a expressão genérica com $V_3(t)$ obtém-se $V_p = 5 \text{ V}$, $\omega = 200 \cdot \pi \text{ rd/s}$ e $\theta_0 = -45^\circ$

Da expressão obtém se $V_p = 5 \text{ V}$, $\omega = 200 \cdot \pi \text{ rd/s}$ e $\theta_0 = -45^\circ \text{ rd}$

$$200 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot f \gg f = 100 \text{ Hz}$$

b) Diagrama Fasorial e forma de onda

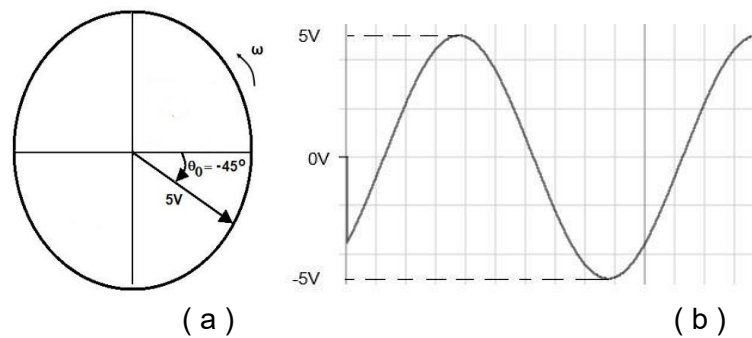


Figura 1.14 – (a) Diagrama Fasorial para exercício resolvido 9 (b) Gráfico de $v(t)$

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

A expressão de $v_3(t) = 5 \cdot \sin(200 \cdot \pi \cdot t - 45^\circ)$ (V) pode ser escrita também na forma:

$$v_3(t) = 5 \cdot \sin(200 \cdot \pi \cdot t + 315^\circ) \text{ (V)}, \text{ isso é, para } t=0$$

$$v_3(0) = 5 \cdot \sin(200 \cdot \pi \cdot 0 - 45^\circ) \text{ (V)} = 5 \cdot \sin(-45^\circ) = 5 \cdot -0,707 = -3,53 \text{ V}$$

$$v_3(0) = 5 \cdot \sin(200 \cdot 0 + 315^\circ) \text{ (V)} = 5 \cdot \sin(315^\circ) = 5 \cdot -0,707 = -3,53 \text{ V}$$

1.2.4 Forma de representar tensão senoidal: Números Complexos

Uma tensão senoidal pode ser representada nas formas complexas polar e cartesiana.

Um número complexo tem: módulo e argumento ou fase.

Tensão senoidal tem: Módulo e fase.

Obs: Dê uma lida no Apêndice 1 sobre números complexos

Exercício Resolvido 10: Seja o número complexo Z representado na forma cartesiana.

$$Z = 4 + j3 \quad \text{Parte real} = 4 \quad \text{Parte imaginária} = 3$$

Representando no plano complexo.

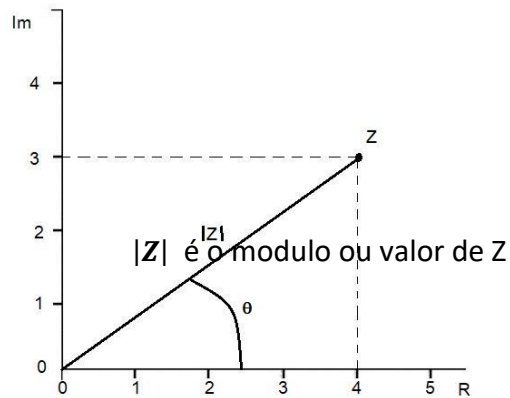


Figura 1.15 – Representação no plano complexo do número complexo do exemplo

$\theta = 36,87^\circ$ é a fase ou argumento de Z.

O mesmo número complexo pode ser representado na forma Polar (módulo e fase).

$$Z = 5 \angle 36,87^\circ$$

Como uma tensão tem módulo e fase também pode ser representada da mesma forma adicionando a unidade Volt (V).

Exercício Resolvido 11: Seja a tensão $v(t) = 30 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^\circ)$ (V).

Na forma polar:

$$V = 30 \angle 60^\circ (V_p)$$

Para obter a forma cartesiana (parte real e parte imaginária) represente no plano complexo, Figura 1.16.

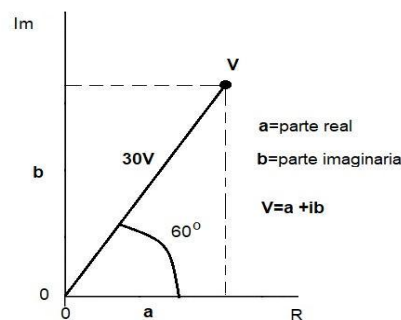


Figura 1.16 – Representação número complexo

Da trigonometria:

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{30V}$$

Ou $a = 30 \cdot \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ V}$ não esqueça, agora tem unidade é tensão!!!

Da mesma forma:

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{30V}$$

Ou $b = 30 \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot 0,866 = 25,98 = 26 \text{ V}$

A tensão representada na forma cartesiana é:

$$V = 15 + j26 \text{ (V)}$$

A expressão pode ser generalizada por:

$$V = V_p \cdot \cos \theta_0 + jV_p \cdot \sin \theta_0 \quad \text{Eq. 5}$$

Obs: A forma polar é usada para multiplicar e dividir dois números complexos, e a forma cartesiana é usada para somar e subtrair dois números complexos.

Exercício Resolvido 12: Representar a tensão V_1 nas formas complexas polar e cartesiana e desenhar o D.F.

$$v_1(t) = 50 \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) \text{ (V)}$$

Solução:

Forma polar

$$V_1 = 50 \angle 90^\circ (V_p)$$

Para obter na forma cartesiana, deve ser representado no plano complexo, Figura 1.17.

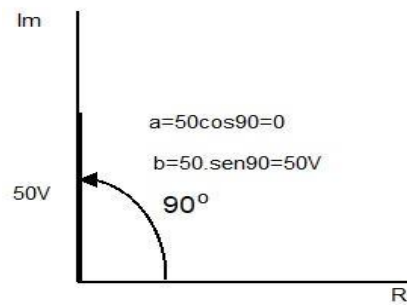


Figura 1.17 – Representação número complexo do exercício resolvido 12 no plano complexo

Na forma cartesiana a tensão é representada por:

$$V_1 = j50 \text{ (V}_p\text{)} \text{ não tem parte real}$$

Exercício Resolvido 13: Representar a tensão nas formas complexas polar e cartesiana e desenhar o D.F.

$$v_2(t) = 30 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^\circ) \text{ (V)}$$

Solução:

Representação na forma polar

$$V_2 = 30 \angle 60^\circ \text{ (V}_p\text{)}$$

Para obter a representação na forma cartesiana é necessário representar no plano complexo Figura 1.18.

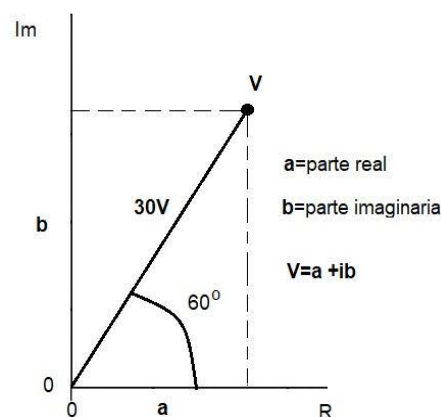


Figura 1.18 – Representação da tensão do exercício resolvido 13 no plano complexo

Usando a expressão genérica: $V = V_p \cdot \cos \theta_0 + j V_p \cdot \sin \theta_0$

$$V_2 = 30 \cdot \cos 60 + j 30 \cdot \sin 60 = 30 \cdot 0,5 + j 30 \cdot 0,866 = 15 + j 26$$

$$V_2 = 15 + j26 \text{ (V)}$$

1.3 Defasagem

A diferença de fase ($\Delta\theta$) entre dois sinais de **mesma** frequência é chamada de defasagem, sendo medida tomando-se um dos sinais como referência

Exercício Resolvido 14:

Qual a defasagem entre os sinais $V_1(t)$ e $V_2(t)$? Representar as duas tensões no D.F (Diagrama Fasorial) e mostrar graficamente as duas tensões representadas em função do tempo.

$$v_1(t) = 10 \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi/2) \text{ (V)}$$

$$v_2(t) = 5 \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ (V)}$$

Solução:

$$\Delta\theta = \theta_{01} - \theta_{02} = 90 - 0 = 90^\circ$$

A Figura 1.19 mostra as duas tensões defasadas no tempo.

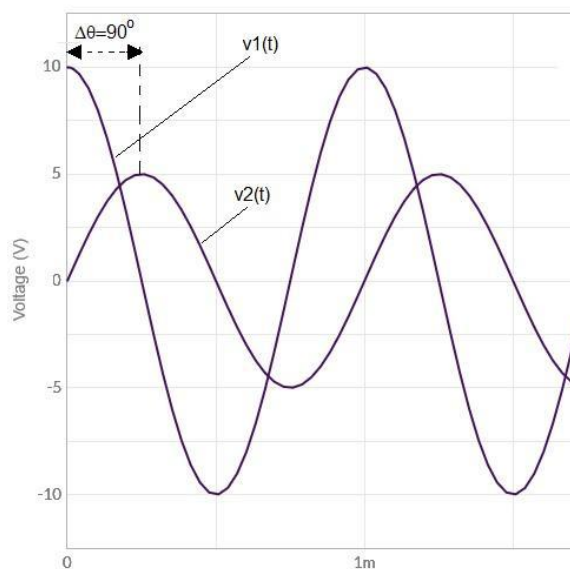


Figura 1.19 – Representação gráfica das duas tensões do exercício resolvido 14 no tempo

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

Quando duas tensões são representadas em função do tempo, a defasagem fica difícil de ver. Se as duas tensões são representadas no Diagrama Fasorial como na Figura 1.20 fica muito simples de ver a defasagem e qual tensão está na frente ou adiantada. Não esqueça que os fasores giram no sentido anti-horário.

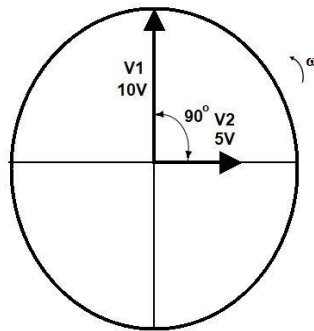


Figura 1.20 – As duas tensões do exercício resolvido 14 no D.F

Obs: A principal aplicação do D.F é mostrar a defasagem, de forma clara, entre duas grandezas vetoriais.

Exercício Resolvido 15:

Qual a defasagem entre os sinais $v_1(t)$ e $v_2(t)$? Representar as duas tensões no D.F (Diagrama Fasorial) e mostrar as duas tensões representadas em função do tempo.

$$v_1(t) = 10 \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) \text{ (V)}$$

$$v_2(t) = 5 \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) \text{ (V)}$$

Solução:

$\Delta\theta = \theta_{01} - \theta_{02} = 90 - 90 = 0^\circ$ as duas tensões estão em fase. A Figura 1.21 mostra as duas tensões em função do tempo.

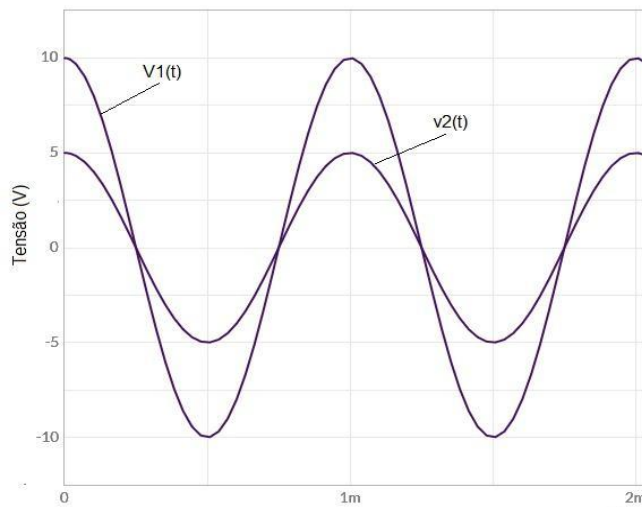


Figura 1.21 – Representação das duas tensões do exercício resolvido 15 no tempo

[Vídeo](#) [Link para Simulador](#)

A Figura 1.22 mostra as duas tensões representadas no D.F.

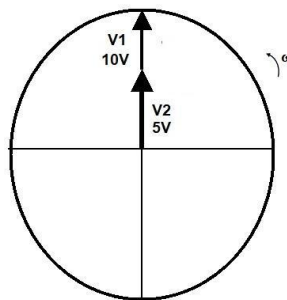


Figura 1.22 – As duas tensões do exercício resolvido 15 no D.F

Exercício Resolvido 16:

Qual a defasagem entre os sinais $v_1(t)$ e $v_2(t)$? Representar as duas tensões no D.F (Diagrama Fasorial) e mostrar as duas tensões representadas em função do tempo.

$$v_1(t) = 10 \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ (V)}$$

$$v_2(t) = 5 \cdot \sin(\omega \cdot t + 180^\circ) \text{ (V)}$$

Solução:

$\Delta\theta = \theta_{01} - \theta_{02} = 180 - 0 = 180^\circ$ as duas tensões estão defasadas de 180° . A Figura 1.23 mostra as duas tensões em função do tempo.

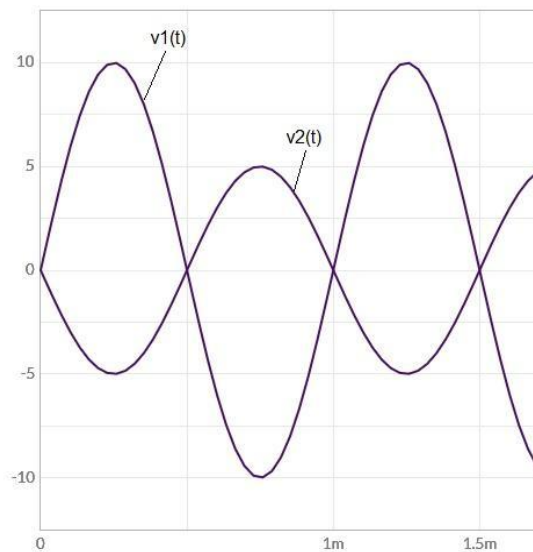


Figura 1.23 – Representação gráfica das duas tensões do exercício resolvido 16

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

A Figura 1.24 mostra as duas tensões representadas no D.F.

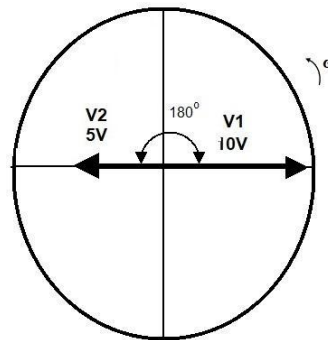


Figura 1.24 – Representação das duas tensões do exercício resolvido 16 no D.F

Exercício Resolvido 17:

Um sistema trifásico de 220 V, é composto por três tensões de mesma amplitude de pico de 311 V e defasadas entre si de 120° . Considerando que a primeira tensão $V_1(t)$ tem fase zero, como são representadas as outras duas tensões $v_2(t)$ e $v_3(t)$?

- Dar a expressão matemática das três tensões
- Representação no D.F se $f=60$ Hz

c) Desenhar as 3 tensões em função do tempo

Solução:

a) $v_1(t) = 311 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (V)

$v_2(t) = 311 \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ)$ (V)

$v_3(t) = 311 \cdot \sin(\omega \cdot t + 240^\circ)$ (V)

b) A Figura 1.25 mostra o D.F das três tensões.

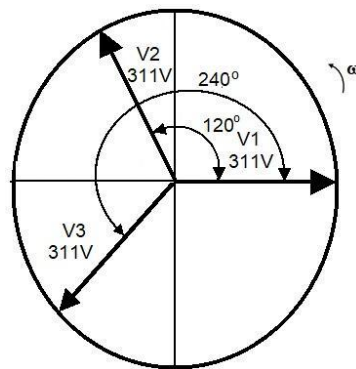


Figura 1.25 – Diagrama Fasorial das três tensões trifásicas do exercício resolvido 17

[Link para Simulador](#) [Vídeo](#)

c) A Figura 1.26 mostra o gráfico em função do tempo das 3 tensões.

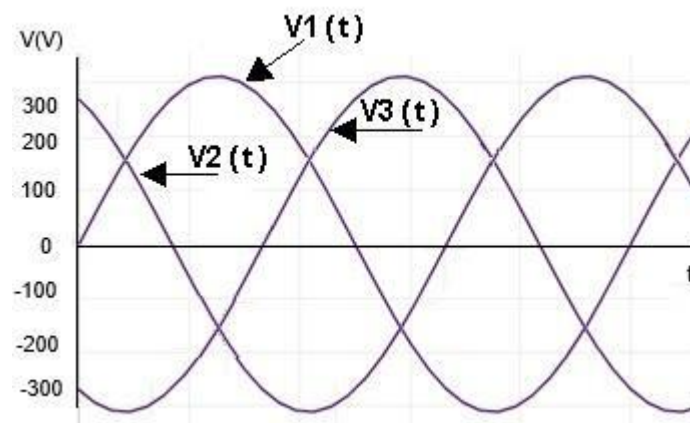


Figura 1.26 – Representação gráfica de 3 tensões trifásicas

[Link para simulador](#) [Vídeo](#)

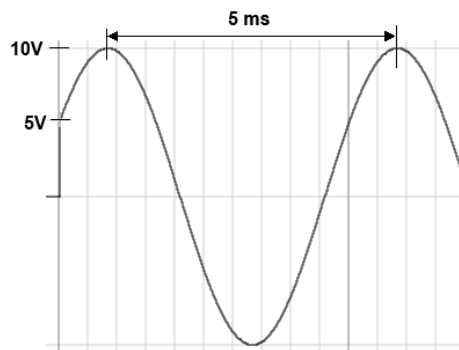
Exercícios Propostos

1.1 Dadas as tensões, $v_1(t)=25.\text{sen}(400.\pi.t+60^\circ)(V)$ e $v_2(t)=25.\text{sen}(400.\pi.t-30^\circ)(V)$, determinar:

- Defasagem entre as duas tensões.
- Representar as duas no mesmo D.F
- Obter $v_3(t)=v_1(t)+v_2(t)$ nas formas polar e cartesiana

1.2 Dado o gráfico de uma tensão senoidal determinar:

- Período, frequência e frequência angular
- Expressão de $v(t)$



[Link para Simulador](#)

1.3 Determine o valor de pico, pico a pico, período, frequência e frequência angular da tensão $v(t)=5.\text{sen}(2.\pi.1000.t-30^\circ)(V)$.

1.4 São dados duas tensões:

$$V_1 = 10\angle 0^\circ (V_p) \quad V_2 = 10\angle 90^\circ (V_p)$$

Obter: $V_3=V_1+V_2$ nas formas cartesiana, polar e trigonométrica

1.5 A expressão de uma tensão é $v(t)=14, 14.\text{sen}(377.t)$. Determinar:

- Valor eficaz
- Frequência
- Valor de $v(3ms)$
- Tempo para que a tensão atinja 10 V a partir do instante $t=0$.